Tema 1. LENGUAJE MATEMÁTICO; OBJETOS MATEMÁTICOS…

Lenguaje matemático

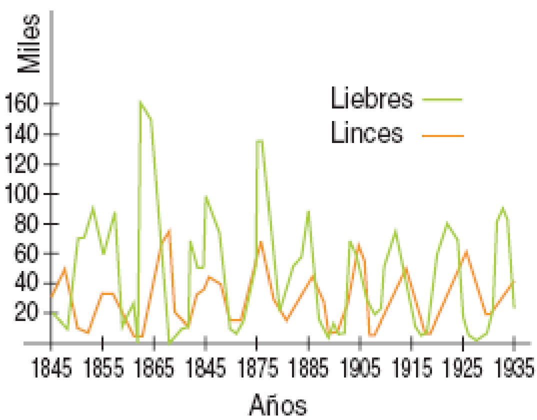
Para aprender Matemáticas hace falta conocer su *idioma*, sus palabras clave, los objetos que se utilizan, las herramientas necesarias para manejar esos objetos…

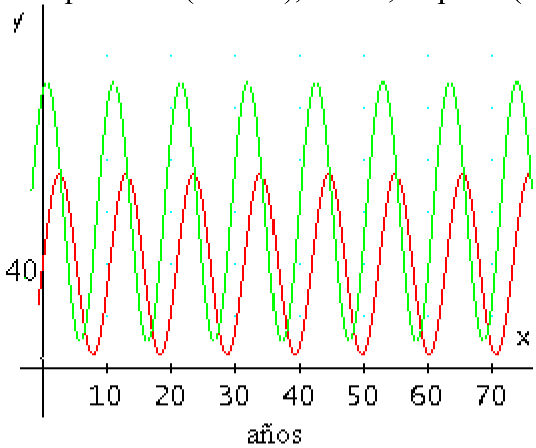
- El idioma que utiliza es formal y abstracto. Mezcla palabras, números, símbolos, figuras y conceptos que tienen un “significado matemático”, que no siempre coincide con el significado en el lenguaje normal, castellano o de cualquier otro idioma.
- La Matemática es una ciencia lógica y deductiva. La deducción lógica exige cumplir unas reglas muy precisas: “si no se cumplen, no funciona”. (Ejemplo de móviles y ordenadores.)
- Parte de unos principios (axiomas); de unas definiciones y conceptos; de unos objetos (números, símbolos, operadores…); de unas “reglas de juego” (propiedades); …
- Las *reglas de juego* hay que aprenderlas, memorizarlas y usarlas. (Esto significa que hay que estudiarlas.)
- Las herramientas que se utilizan son los conceptos, las operaciones, las propiedades…
- Utilizando esas herramientas se genera un método, una teoría.
- Los resultados deben ser demostrados; no basta con una simple comprobación. Una vez demostrados pueden aplicarse como un molde.

Qué estudia la matemática

Sin entrar en detalle, puede decirse que la matemática estudia la cantidad (números; álgebra), la extensión (la figura, la forma, ángulos; geometría); el cambio, la variación de magnitudes (el límite; análisis); grandes conjuntos de datos (estadística); el azar y su medida (probabilidad).
Pero lo realmente importante de la matemática es su método (lógico, deductivo, constructivo, seguro y universal), que hace que pueda aplicarse en prácticamente todas las otras ciencias: como herramienta de cálculo y de visualización, como sistema de organización del conocimiento teórico (proporcionando modelos matemáticos), como “garantía” de certeza…

Ejemplo:
En la siguiente figura se muestra un fenómeno casi periódico (real). Se trata de la relación entre dos poblaciones silvestres del Canadá, una de ellas un depredador (el lince), la otra, su presa (la liebre).





A la derecha se da un modelo teórico, donde cada una de las poblaciones ha sido ajustada a las funciones $f(x)=60+50\sin(0,6x+1,2)$, liebres; y $g(x)=40+35\sin(0,6x)$, linces. Es evidente que ese modelo teórico no es bueno. Su aplicación podría generar grandes errores.
(La idea de este ejemplo está tomada del libro de 1º de Bachillerato para CC SS de McGraw–Hill, 2007.)

Ejemplo:

En la tabla siguiente se muestra la población española a lo lago del siglo XX.

Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Población en miles	18616	19990	21388	23877	26014	28117	30582	33956	37742	39433	40450

Se observa que:

(Población 1910) : (Población 1900) = 19990 : 18616 = 1,0738

(Población 1920) : (Población 1910) = 21388 : 19990 = 1,0699

(Población 1930) : (Población 1920) = 23677 : 21388 = 1,1070

(Población 1940) : (Población 1930) = 26014 : 23677 = 1,0987

Es decir, los cocientes de $P(t)$ para valores igualmente espaciados (10 años) son parecidos, con una media de 1,087. Así pues, sabiendo que la población en 1900 era de 18616 (miles), podemos estimar la población en las décadas siguientes.

Si llamamos t al número de décadas transcurridas desde 1900, podemos trabajar así:

En 1910, $t = 1$: $P(1) \approx P(0)\cdot 1{,}087 = 18616{\cdot}1{,}087 = 20236$

En 1920, $t = 2$: $P(2) \approx P(1){\cdot}10{,}87 = P(0)\cdot 1{,}087^2 = 18616{\cdot}1{,}087^2 = 21996$

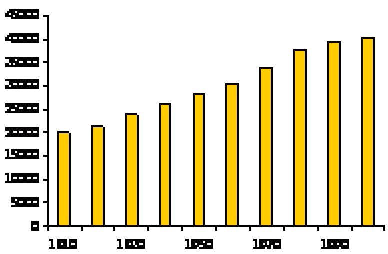
En 1960, $t = 6$: $P(6) \approx P(0)\cdot 1{,}087^6 = 18616{\cdot}1{,}087^6 = 30709$.

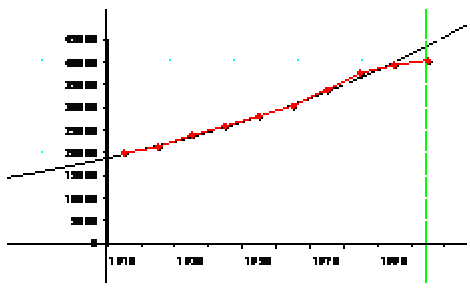
Y, por último, en 1990, $t = 9$: $P(9) \approx 18616{\cdot}1{,}087^9 = 39441$, resultado de notable precisión.

En general: $P(t) = 18616\cdot 1{,}087^t$, que una función exponencial.

El diagrama de barras es el correspondiente a los datos de la tabla.

La línea roja de la figura de la derecha corresponde a los mismos datos. La línea negra es la de la función exponencial.





Comentarios:

- Los fenómenos demográficos, y en general la mayoría de los fenómenos económicos y sociales, no se ajustan de manera permanente a una función exponencial, ni de ningún otro tipo, pues suelen darse cambios de tendencia debidos a diversas razones. Así, si seguimos la evolución de la población española a partir de 1990 vemos que no se ajusta a la exponencial $P(t) = 18616\cdot 1{,}087^t$, pues en 2000: $P(10) \approx P(0)\cdot 1{,}087^{10} = 18616{\cdot}1{,}087^{10} = 42873$, que se aleja del dato real. (Como sabrás, en los últimos años del siglo XX se produce un estancamiento en la población, mientras que en los primeros años del siglo XXI, como consecuencia de la emigración, la población española ha crecido notablemente, lo que puede implicar que para el 2010 este modelo vuelva a ser válido)
- El modelo elegido en este caso ha sido de tipo funcional, pero en la mayoría de los casos asociados a las ciencias sociales los modelos deben ser probabilísticos.

(La idea de este ejemplo está tomada del libro de 1º de Bachillerato para CC SS de ediciones SM, 2008.)

Objetos matemáticos

Con la palabra objeto se quiere designar las cosas (elementos) que se emplean en Matemáticas. Hay objetos aritméticos, geométricos, del análisis, de la estadística, … Así, un número, un ángulo, una recta, un intervalo, un diagrama de barras, un paréntesis, el signo de igualdad o cualquier otro símbolo, una ecuación o un exponente, pueden ser considerados objetos. Esos objetos deben ser empleados correctamente, distinguiendo unos de otros y agrupándolos cuando convenga o sea necesario. Por ejemplo, el símbolo de la raíz cuadrada, $\sqrt{\ }$, tiene un significado preciso; si se emplea mal es imposible que los resultados sean correctos. Y lo mismo pasa con cualquier objeto: hay que saber qué es, para qué sirve, cómo se maneja…

En general, los objetos matemáticos suelen darse mediante una definición. Unido a la definición puede ir el procedimiento, el cómo se hace; y también las propiedades que cumplen. Algunas de esas propiedades se llaman *axiomas* o postulados, y se aceptan sin demostrar, supuestamente por su evidente certeza. (Por ejemplo, la geometría clásica se asienta sobre cinco axiomas, conocidos como postulados de Euclides.) Los axiomas son los principios, algo similar a las reglas de cualquier juego, que son imprescindibles para poder jugar. Así, en el ajedrez cada pieza se mueve según una regla no discutible, y para jugar hay que aceptar dichas reglas.

A partir de esos axiomas, y siempre por deducción lógica, se obtienen otras propiedades o teoremas. Se construye así una *teoría matemática*. (Por ejemplo, a partir de los postulados de Euclides se demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, 180º. Y todas las propiedades relacionadas con ángulos, con distancias, con rectas…). Los grandes bloques teóricos de la matemática de secundaria son: aritmética y álgebra (números y expresiones algebraicas, operaciones y propiedades, ecuaciones…); geometría (polígonos, rectas, distancias…), análisis (funciones, límites, derivadas…); estadística y probabilidad (tratamiento de grandes conjuntos de datos, parámetros estadísticos, sucesos aleatorios…)

Quizás resulte conveniente, para entender mejor lo que se quiere expresar, distinguir tres palabras (tres conceptos): demostración, comprobación y conjetura.
Una *demostración* es el proceso lógico que asegura que una determinada propiedad es cierta siempre, para cualquier valor del objeto considerado.
Una *comprobación* es la verificación de que una propiedad (una igualdad, por ejemplo) es cierta para un caso particular. Pero una comprobación, en modo alguno, es equivalente a una demostración.
Una *conjetura*, una suposición, por muy razonable que parezca, sólo puede ser admitida como cierta cuando se llegue a demostrar por deducción lógica. Por ejemplo, la conjetura de Goldbach afirma que "todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos". Se ha comprobado que esta afirmación es valida para millones de números pares, pero no se ha demostrado que sea cierta en general.

En definitiva, y como resumen de este párrafo, para aprender a trabajar matemáticamente hay que saber tres cosas:
1. Qué tipo de objetos se emplean. Para qué se usa cada uno.
2. Cómo se manejan, qué propiedades cumplen.
3. Cómo se relacionan entre ellos: operaciones. La operación se define; las propiedades generan resultados.

Objetos aritméticos

Los objetos de la aritmética y del algebra son los más utilizados, ya que se emplean en todas las ramas de las matemáticas. Por tanto, resulta imprescindible conocerlos y manejarlos con soltura.

Los objetos matemáticos básicos asociados a la aritmética y al álgebra son los números y las expresiones algebraicas. Estos objetos suelen relacionarse mediante operaciones o mediante composiciones.

Las operaciones elementales son la suma–resta y la multiplicación–división. Esas operaciones se rigen por unas reglas que llamamos propiedades: conmutativa, asociativa…

Por composiciones se quiere designar la concatenación de operaciones, signos, paréntesis…, dando lugar a objetos más complejos. En esas composiciones suele ser determinante el orden en el que se suceden los símbolos. Por ejemplo, no es indiferente que un signo menos vaya delante, dentro o detrás de un paréntesis: –(*), (– *), (*) –. [El * designa cualquier otro objeto matemático]. En cambio, otras veces dará igual ese orden; así, por ejemplo, – (+4) = + (–4). Estas y otras son las reglas que hay que conocer para trabajar con objetos matemáticos.

Las operaciones aritméticas elementales

El lector debería estar familiarizado con cualquiera de las operaciones con números: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, raíces. Y con las operaciones con cualquier tipo de números: naturales (enteros positivos), enteros negativos, fraccionarios (racionales) y radicales (un tipo de irracionales). Aquí, de momento, se recordarán las dificultades más comunes, que dan lugar a la mayoría de los errores. Algunas de ellas se presentan cuando:

1. Se opera con números enteros, sumando/restando o multiplicando/dividiendo. Las reglas a seguir son, básicamente, las relacionadas con los signos, la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis.

Ejemplo:
La operación $15 - 3 \cdot (7 - 9) = 15 - 3 \cdot (-2) = 15 + 6 = 21$.
Observa que primero se opera dentro del paréntesis, a continuación se hace el producto, y, por último, se realiza la suma.

2. Se opera con fracciones, pues además de lo anterior hay que saber el mecanismo de las operaciones.

Ejemplo:
Para realizar la operación $\frac{5}{18} - \frac{2}{27} + 3$, además de saber el significado de cada uno de los sumandos, hay que reducir a común denominador, procediendo como sigue:

$$\frac{5}{18} - \frac{2}{27} + 3 = \frac{5}{18} - \frac{2}{27} + \frac{3}{1} = \frac{15}{54} - \frac{4}{54} + \frac{162}{54} = \frac{15-4+164}{54} = \frac{175}{54}$$

3. Se opera con potencias.

Ejemplos:
Para realizar esta operación $3^2 - 3\cdot\left(1 + (-2)^3\right)^2$, hay que seguir con cuidado el orden de las operaciones. Se haría así:

$$3^2 - 3\cdot\left(1 + (-2)^3\right)^2 = 9 - 3\cdot(1 + (-8))^2 = 9 - 3\cdot(1 - 8)^2 = 9 - 3\cdot7^2 = 9 - 3\cdot49 = 9 - 147 = -138$$

4. Se realizan operaciones con radicales, pues muchas veces esas operaciones no son evidentes y hay que transformar las raíces en otras equivalentes.

Ejemplo:
a) La operación $3\sqrt{5}-\sqrt{10}$ no puede simplificarse. Solamente puede darse un resultado aproximado; así:

$$3\sqrt{5}-\sqrt{10} = 3 \cdot 2{,}236 - 3{,}162 = 3{,}918.$$

b) En cambio, $5\sqrt{3}-2\sqrt{12}$ puede operarse haciendo las siguientes transformaciones:

$$5\sqrt{3}-2\sqrt{12} = 5\sqrt{3}-2\sqrt{4\cdot 3} = 5\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}-2\cdot 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}-4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Naturalmente, para poder hacer correctamente esos cambios hay que conocer las reglas de las operaciones con radicales.

Reglas de funcionamiento de las operaciones

Para operar correctamente con objetos aritméticos y algebraicos hay que tener en cuenta:
1. Las definiciones. ¿Qué tipo de operación se está realizando y cómo se ha definido?
2. Las propiedades. ¿Qué propiedades cumple esa operación? (Qué puede hacerse y qué no.)
3. Los procedimientos. ¿Cómo hay que proceder cuando las operaciones están combinadas (varias a la vez) y se usan paréntesis?

Las definiciones
Una definición dice lo que es una cosa. Unido a la definición puede ir el procedimiento: el cómo se hace. Así sucede cuando se definen operaciones.

En matemáticas, las definiciones son importantísimas, pues si no se actúa de acuerdo con lo que son las cosas, el trabajo resulta inútil. No es útil trabajar con fracciones si no se sabe lo que es una fracción; ni con potencias, desconociendo su significado.

Lo habitual es que la definición se dé al principio de cada teoría estudiada. Es ahí donde hay que preguntarse si se sabe lo que se está manejando, en dónde se está, con qué objetos se está trabajando, y asegurarse de que se entiende cada una de las partes de la definición.

En los párrafos que siguen se dan varias definiciones, casi todas de matemáticas elementales. En cada caso se procurará alguna aplicación de esa definición.

Definición de la operación ☺: A modo de juego puede definirse la operación ☺ como sigue:
X ☺ Y = 2X + 5Y. Esto es, el resultado de operar dos números mediante ☺ es la suma del doble del primero más el quíntuple del segundo. Por ejemplo: 4 ☺ 7 = 2 · 4 + 5 · 7 = 8 + 35 = 43.

Cada vez que aparezca el símbolo ☺ entre dos números debe operarse de acuerdo con la definición. Una vez definida esa operación podemos preguntarnos por las propiedades que cumple: ¿será conmutativa?; ¿verificará la propiedad distributiva?... ¿cuál será el valor de 7 ☺ (4 ☺ 1)?

Definición de fracción: Una fracción es una parte de un todo. En matemáticas, para que esta expresión tenga sentido se pide que el todo se divida en un número exacto de partes iguales. Así, si una cosa (una tarta, una finca, una cantidad de dinero o un grupo de personas), se divide, pongamos en seis partes iguales, cada una de esas partes es "un sexto" de esa cosa: $\frac{1}{6}$.

Ejemplos:

a) En el supuesto de que “el todo” sean 24 personas, un sexto de ellas serían 6 personas: $\frac{1}{6}$ de 24 = 4.

Si el todo son 1500 euros, $\frac{1}{6}$ de 1500 € = 250 €.

b) Cuando se toman 2 de esas 6 partes, la fracción correspondiente es “dos sextos”: $\frac{2}{6}$. Como es evidente, $\frac{2}{6}$ es el doble de $\frac{1}{6}$. Esto es: $\frac{2}{6}=2\cdot\frac{1}{6}$. Por eso, $\frac{2}{6}$ de 1500 € = 250 € + 250 € = 500 €. La operación que hay que realizar es: $\frac{2}{6}$ de 1500 € = $\frac{2}{6}\cdot 1500=\frac{2\cdot 1500}{6}=\frac{3000}{6}=500$ €.

c) La fracción $\frac{6}{6}$ representa el todo: $\frac{6}{6}=1$ (la totalidad de la cantidad dividida). Así, $\frac{6}{6}$ de 1500 € = 1500 €.

Definición de porcentaje. Un porcentaje es una parte de un todo que vale 100: *un tanto por 100*. Un 7 por 100, 7%, significa que de 100 partes se toman 7. Esto es: el 7 % es igual a la fracción $\frac{7}{100}$.

Ejemplo:

El 3 % de una cantidad es la fracción $\frac{3}{100}$ de esa cantidad. Así, el 3 % de 1500 € es

$\frac{3}{100}\cdot 1500=3\cdot 15=45$ €.

Observaciones:

1. Como $\frac{3}{100}$ = 0,03, el 3% de una cantidad se calcula multiplicándola por 0,03. Así, el 3% de 1500 = 0,03 · 1500 = 45.
2. Esto que acabamos de hacer es una consecuencia de la definición. Es una *propiedad* que facilita el cálculo de porcentajes.

Definición de potencia: $A^n=A\cdot A\cdot\ldots\cdot A$, el factor *A*, que puede ser un número o cualquier objeto matemático, se repite *n* veces.
Entender esta definición implica, entre otras cosas, saber que:
a) $2^5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=32$.
b) $(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=81$
c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3}=\frac{8}{27}$
d) $(2x-1)^2=(2x-1)\cdot(2x-1)=4x^2-2x-2x+1=4x^2-4x+1$
e) La expresión: $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)(c-d)\cdot(c-d)$ puede escribirse como $(a+b)^3\cdot(c-d)^2$.

Definición de raíz cuadrada de un número: la raíz cuadrada de un número *A* es otro número *a* tal que $a^2=A$. Simbólicamente se indica así: $\sqrt{A}=a$.
La raíz cuadrada de los números negativos no existe.

La raíz cuadrada de un número puede tomar los dos signos.

Ejemplos:
a) $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{169}=13$; $\sqrt{10000}=100$; $\sqrt{0,04}=0,2$; $\sqrt{9,61}=3,1$.
Puede comprobarse en todos los casos que:
$9 = 3^2$; $49 = 7^2$; $169 = 13^2$; $10000 = 100^2$; $0,04 = 0,2^2$; $9,61 = 3,1^2$.

b) Respecto al doble signo de la raíz, puede observase que $\sqrt{9}=\pm 3$, pues tanto 3 como −3 al cuadrado vale 9. Y lo mismo podría decirse de cualquier otra raíz: $\sqrt{9,61}=\pm 3,1$, pues $(3,1)^2 = (-3,1)^2 = 9,61$.

Las propiedades
Las propiedades de una determinada operación indican lo que puede hacerse o no. El objetivo de las propiedades no es complicar los cálculos (aunque su formulación teórica así lo parezca). Las propiedades se formulan para hacer los cálculos más rápidos y sencillos; o para indicar caminos alternativos cuando se presenten dificultades.

Un ejemplo de la ventaja de conocer una propiedad es la extracción de factor común, consecuencia directa de la propiedad distributiva.

- Propiedad distributiva del producto respecto de la suma, dice: “el producto de un número por una serie de sumandos puede calcularse sumando las multiplicaciones del número por cada uno de los sumandos”. Con símbolos:

$$a \cdot (b + c + d) = ab + ac + ad.$$

siendo a, b, c y d números o expresiones algebraicas.

Ejemplos:

$$6 \cdot (3 + 9 - 4) = 6 \cdot 8 = 48$$
$$6 \cdot (3 + 9 - 4) = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 9 - 6 \cdot 4 = 18 + 54 - 24 = 18 + 30 = 48.$$

Nota: Parece claro que la propiedad distributiva no debe emplearse en casos como el del ejemplo anterior: se tarda más en operar. Debe emplearse cuando no puede operarse dentro del paréntesis. Por ejemplo:

$$3 \cdot (2 - 6x) = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 6x = 6 - 18x$$

- La propiedad distributiva utilizada de derecha a izquierda se conoce con el nombre de sacar factor común. Esto es:

$$ab + ac + ad. = a \cdot (b + c + d)$$

Ejemplos:

$$2x - 5x + 9x = (2 - 5 + 9)x = 6x$$
$$6x - 3x^2 + 9x^3 = 2\cdot 3x - 3x\cdot x + 3x\cdot 3x^2 = 3x\left(2 - x + 3x^2\right)$$

- La formulación de una propiedad puede suponer un obstáculo debido a que su generalización exige el uso de símbolos, letras y expresiones algebraicas diversas. Por eso, más que en la simbología habría que incidir en el significado.

Ejemplo:

Una de las propiedades de la potenciación dice así: $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; o sin el punto de multiplicación, $(ab)^n = a^n b^n$, siendo a y b números o expresiones cualesquiera.

Esta propiedad significa que "la potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada uno de los factores".

En concreto:

$$(2x)^5 = 2^5 x^5 = 32x^5; \qquad 5^4 x^4 = (5x)^4$$

Análogamente,

$$(3\cdot 10)^4 = 3^4 \cdot 10^4 = 81\cdot 10000 = 810000 \rightarrow \text{haciendo el producto de las potencias}$$

$$(3\cdot 10)^4 = 30^4 = 810000 \rightarrow \text{haciendo la potencia del producto}$$

Por lo mismo:

$$2^6 \cdot 5^6 = (2\cdot 5)^6 = 10^6 = 1000000$$

Si en este último ejemplo no se aplica esa propiedad, la operación que resultaría más engorrosa, pues:

$$2^6 \cdot 5^6 = 64\cdot 15625 = 1000000$$

Nota. Un error clásico al calcular $(2x)^5$, es escribir $(2x)^5 = 2x^5$. Esto es, ignorar que el paréntesis indica que el exponente afecta a todo lo que contiene.

Algunos procedimientos (otras reglas de funcionamiento)

Además de las propiedades de las operaciones, que nos facilitan el manejo de las expresiones y demás objetos matemáticos, existen otras herramientas que hay que manejar con destreza. A continuación nos fijamos en algunas de ellas.

Paréntesis y prioridad de operaciones

Los paréntesis, ( ), son símbolos que se utilizan para agrupar objetos matemáticos. Todo lo que vaya dentro de un paréntesis actúa como un solo objeto. Lo normal es que se opere dentro del paréntesis para simplificarlo. Los corchetes, [ ], o las llaves, { }, tienen la misma significación.

Ejemplo:

Para realizar la operación $7 - (4 + 5 - 1) + 3 \cdot [7 - 2]^2$, lo normal es escribir:

$$7 - (4 + 5 - 15) + 3 \cdot [7 - 2]^2 = 7 - (-6) + 3 \cdot 5^2 = 7 + 6 + 3 \cdot 25 = 7 + 6 + 75 = 88.$$

- Para sacar elementos de un paréntesis hay que seguir las reglas de las operaciones. Así, en el ejemplo anterior pueden aplicarse tres reglas:

1. Un signo menos delante de un paréntesis afecta a todos los objetos que están dentro de él;
2. El cuadrado de una diferencia es igual a la suma de los cuadrados de los términos menos el doble de su producto, esto es $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$;
3. Si un número multiplica a un paréntesis, multiplica, uno a uno, a todos los elementos que hay dentro de él.

Por tanto:

$$7 - (4 + 5 - 15) + 3 \cdot [7 - 2]^2 = 7 - 4 - 5 + 15 + 3 \cdot [7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2] =$$
$$= 7 - 4 - 5 + 15 + 3 \cdot [49 + 4 - 28] = 7 - 4 - 5 + 15 + 3 \cdot 49 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 28 =$$
$$= 7 - 4 - 5 + 15 + 147 + 12 - 84 = 88.$$

Nota. Es evidente que la primera forma de operar es más simple, rápida y segura. Será la que se emplee siempre que sea posible.

Errores frecuentes
Los paréntesis, combinados con productos y signos suelen ser fuente de problemas. En los siguientes ejemplos se ponen de manifiesto algunos errores frecuentes.

Ejemplos:

a) $5 - (2x - 7) = 5 - 2x - 7$ es erróneo. Un signo – delante de un paréntesis cambia de signo a todos los elementos que están dentro.

Lo correcto es: $5 - (2x - 7) = 5 - 2x + 7 = 12 - 2x$

b) $5 \cdot 2^3 = 10^3$ es erróneo. Si ha visto un paréntesis donde no lo hay. Se ha visto $(5 \cdot 2)^3$, que, efectivamente es 10^3.

Lo correcto es: $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$

c) $(2x)^3 = 2x^3$ es erróneo. Se ha cometido el error contrario: se ha ignorado el paréntesis.

Lo correcto es: $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

d) $(2 + x)^2 = 4 + x^2$ es erróneo. Se ha olvidado que el cuadrado afecta a todo el paréntesis.

Lo correcto es: $(2 + x)^2 = (2 + x) \cdot (2 + x) = 4 + 4x + x^2$

e) $-4^2 = 16$ es erróneo. Se ha supuesto que el exponente afecta al signo –; en ese caso habría que haber escrito $(-4)^2$.

Lo correcto es: $-4^2 = -4 \cdot 4 = -16$.

f) $(-3) \cdot 6 + 2 = (-3) \cdot 8 = -24$ es erróneo. Se ha supuesto que $(-3) \cdot 6 + 2 = (-3) \cdot (6 + 2)$.

Lo correcto es: $(-3) \cdot 6 + 2 = -18 + 2 = -16$.

- La mayoría de los errores citados están relacionados con el desconocimiento de la prioridad de las operaciones. Debe recordarse que cuando aparecen una serie de operaciones combinadas: sumas, restas, productos, cocientes, paréntesis… conviene seguir el siguiente orden:

1.º Resolver los paréntesis;
2.º Hacer multiplicaciones y divisiones;
3.º Hacer sumas y restas.

Ejemplos:

a) Para hallar $(-3) \cdot [(-2) \cdot (-8) - 2 \cdot 5] + (12 - 10)$, la prioridad es:
Agrupar el corchete y el paréntesis:

$$(-3) \cdot [(-2) \cdot (-8) - 2 \cdot 5] + (12 - 10) = (-3) \cdot [16 - 10] + 2 = (-3) \cdot 6 + 2$$

Multiplicar y sumar (y atención a los signos):

$$(-3) \cdot 6 + 2 = -18 + 2 = -16$$

b) En el ejemplo a) se trastocan los paréntesis. Operación: $(-3) \cdot [(-2) \cdot (-8) - 2] \cdot 5 + (12 - 10)$.
El resultado es:

$$(-3) \cdot [(-2) \cdot (-8) - 2] \cdot 5 + (12 - 10) = (-3) \cdot [16 - 2] \cdot 5 + 2 = (-3) \cdot 14 \cdot 5 + 2 =$$
$$= -210 + 2 = -208$$

Reglas de transformación de igualdades

En Matemáticas se trabaja continuamente con igualdades. Con frecuencia se trata de poner una *cosa* detrás de otra, de manera que la última *cosa* sea igual a la primera. Para que esa secuencia sea cierta es preciso que se apliquen correctamente las reglas de transformación de igualdades.

Algunas de las propiedades usadas para transformar igualdades son:

1. Si A = B entonces:

$$A + n = B + n \qquad A - n = B - n$$
$$A \cdot n = B \cdot n \qquad A : n = B : n, \text{ si } n \neq 0$$

Aquí A, B y n son números o expresiones algebraicas.

En estas propiedades se fundamenten las reglas de adición y de multiplicación para resolver ecuaciones.

Ejemplo:

Para resolver la ecuación $3x - 9 = x + 2$, pueden aplicarse las reglas anteriores como sigue:

$$3x - 9 = x + 2 \Leftrightarrow (3x - 9) + 9 - x = (x + 2) + 9 - x \Leftrightarrow 2x = 11 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x = \frac{11}{2}$$

Estas reglas se concretan en las conocidas frases: “lo que está sumando (en un miembro) pasa restando (al otro miembro), y lo que está restando, pasa sumando”; “lo que está multiplicando, pasa dividiendo, y lo que está dividiendo, pasa multiplicando”.

Con esto, la resolución de la ecuación anterior resulta más fluida así:

$$3x - 9 = x + 2 \Leftrightarrow 3x - x = 2 + 9 \Leftrightarrow 2x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2}$$

2. Si A = B ⇔ B = A ⇔ −A = −B ⇔ −B = −A.

Esta propiedad permite trasponer los miembros de una igualdad sin necesidad de cambiar de signo; o cambiar de signo sin necesidad de trasponer los miembros.

Ejemplos:

a) Si $10 = 5x \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$.

b) Si $-4 = 2x \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

c) Si $-5x = 0 \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0$.

d) $0 = -2x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Esta segunda ecuación se maneja (resuelve) mejor que la primera.

- Esta propiedad, A = B ⇔ B = A, que parece una perogrullada, es de gran utilidad cuando se trabaja con expresiones matemáticas, ya que unas veces hay que ir de A a B; pero otras veces, lo conveniente será hacer el camino contrario: ir de B a A. (Esa doble posibilidad de escribir la misma igualdad es lo que engloba la expresión “caminos de ida y vuelta”.)

3. Si A = B y A = C, entonces B = C. (Donde A, B y C son expresiones cualesquiera.)

Ejemplo:

Si se cumple a la vez que $y = -x^2 + 6x$ e $y = 2x + 3$, entonces $-x^2 + 6x = 2x + 3$. Ecuación que es equivalente a $x^2 - 4x + 3 = 0$, cuyas soluciones son $x = 1$ y $x = 3$.

4. S A = B, entonces $A^2 = B^2$. (En general, $A = B \Rightarrow A^n = B^n$, para n un número entero.)

Esta propiedad se utiliza para resolver ecuaciones en las que aparezcan raíces cuadradas.

- La recíproca no siempre es cierta: Si $A^2 = B^2$ no puede asegurarse que A = B.

Ejemplos:
a) Para resolver la ecuación $\sqrt{2x+7} = 3$, puede procederse así:

$$\sqrt{2x+7} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{2x+7}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow 2x+7 = 9 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

b) Para ver que el recíproco no siempre es cierto basta con recurrir a un contraejemplo.
Si en la expresión $(+5)^2 = (-5)^2$ se quitan los exponentes queda +5 y −5, que obviamente no son iguales. Por eso, cuando se resuelve la ecuación $x^2 = 25$ hay que decir que $x = 5$ o $x = -5$.

Algo sobre desigualdades
Los signos de desigualdad son: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$
Escribir $A < B$ significa que el valor de A es menor que el valor de B.
La expresión $A \geq B$ significa que el valor de A es mayor o igual que el valor de B.

Algunas propiedades de las desigualdades son:
1. Si $A < B$ entonces:

$A + n < B + n$ $\qquad$ $A - n < B - n$

$A \cdot n < B \cdot n$, si $n > 0$ $\qquad$ $A/n < B/n$, si $n > 0$

$A \cdot n > B \cdot n$, si $n < 0$ $\qquad$ $A/n > B/n$, si $n < 0$

Observaciones:
1. **OJO** con la tercera conclusión: Si se multiplica (o divide) por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.
2. Resultan evidentes las siguientes conclusiones:

$A < B \Leftrightarrow B > A$ $\qquad$ $A < B \Leftrightarrow -A > -B$

3. Lo dicho para $<$ o $>$ sirve para $\leq$ o $\geq$.

Ejemplos:
a) Obsérvese:

$3 < 5$ (multiplicando por 6) $\Rightarrow$ $18 < 30$

$3 < 5$ (multiplicando por −6) $\Rightarrow$ $-18 > -30$ (se cambia $<$ por $>$)

b) Igualmente:

$2x^2 < 8$ (dividiendo por 2) $\Rightarrow$ $x^2 < 4$.

$-x+1 < -2x$ (multiplicando por −1) $\Rightarrow$ $-(-x+1) > 2x \Leftrightarrow 2x < x - 1$.

c) Si $10 < 5x \Rightarrow 5 < x \Rightarrow x > 2 \to x > 2$ son todos los puntos del intervalo $(2, +\infty)$.
d) Si $-2x \geq 4 \Rightarrow 2x \leq -4 \Rightarrow x \leq -2 \to x \leq -2$ son todos los puntos del intervalo $(-\infty, 2]$.

2. Otras propiedades son:

$A < B$ no implica que $A^2 < B^2$

$|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$

$|A| > B \Leftrightarrow A > B$ o $-A > B$

Ejemplos:
a) De $3 < 5$ se sigue que $3^2 < 5^2 \to 9 < 25$. Pero de $-5 < -3$ no se sigue que $(-5)^2 < (-3)^2$.
b) La expresión $|x| < 3$ se cumple cuando $-3 < x < 3$. Esto es: $|x| < 3 \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$.
c) La expresión $|x| \geq 3$ se cumple cuando $x \leq 3$ o cuando $x \geq 3$.

Un paso adelante. Desarrollando la teoría

Cuando se manejan con soltura las operaciones elementales y sus propiedades surge la necesidad de avanzar más. La matemática da respuesta a muchísimas preguntas y puede aplicarse en problemas diversos. Eso exige definir conceptos nuevos, formular propiedades nuevas, descubrir nuevos problemas… En definitiva, se comienza a desarrollar una teoría: se plantean conjeturas, se demuestran propiedades, se aplican a problemas concretos.

Como aclaración, vamos a desarrollar parte de la teoría de las progresiones aritméticas.

Definición. Una sucesión de números se dice que es una progresión aritmética cuando cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo, llamado *diferencia* de la progresión.

Ejemplos:
a) La sucesión 2, 5, 8, 11,… es una progresión aritmética de diferencia $d = 3$.
b) La sucesión 7, 5, 3, 1,… es una progresión aritmética de diferencia $d = -2$.
c) La sucesión 2, 3, 5, 8, 12,… no es una progresión aritmética.

Un paso adelante. Fácilmente puede deducirse que, en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma. En consecuencia, una progresión aritmética queda determinada dando cualquier término y la diferencia.

Ejemplos:
a) Si dos términos consecutivos de una p. a. valen 7 y 12, su diferencia es $12 - 7 = 5$. Otros términos son: $12 + 5 = 17$, $17 + 5 = 22$…
b) La sucesión 2, 3, 5, 8, 12,… no es una progresión aritmética, porque la diferencia entre dos términos consecutivos no es la misma: $3 - 2 = 1$; $5 - 3 = 2$.

Generalizando
Si a los sucesivos términos de la progresión se le designan por $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ y la diferencia por d, la progresión aritmética es:

$$a_1 \qquad a_2 = a_1 + d \qquad a_3 = a_2 + d \qquad a_4 = a_3 + d \qquad \ldots \qquad a_n = a_{n-1} + d$$

La última expresión, $a_n = a_{n-1} + d$, generaliza cualquier término; por tanto, puede servir para definir cualquier progresión si se indica el valor de a_1 y la diferencia d. (Esta definición se conoce como fórmula de recurrencia.)

Ejemplos:
a) La progresión 3, 5, 7, 9… puede definirse indicando $a_1 = 3$ y $a_n = a_{n-1} + 2$.
b) La progresión $a_1 = 3$ y $a_n = a_{n-1} - 4$ es: 3, –1, –5…, pues $a_2 = a_1 - 4 = 3 - 4 = -1$, $a_3 = a_2 - 4 = -1 - 4 = -5\ldots$

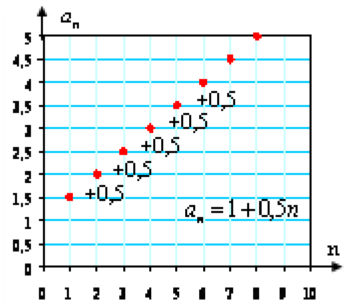
Otra generalización
El término general también se puede obtener observando que:

De $\quad a_1 \qquad a_2 = a_1 + d \qquad a_3 = a_2 + d \qquad a_4 = a_3 + d \qquad \ldots \qquad a_n = a_{n-1} + d$

se tiene: $\quad a_2 = a_1 + d \qquad a_3 = a_1 + 2d \qquad a_4 = a_1 + 3d \qquad \ldots \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$

En consecuencia, el término general de una progresión aritmética es: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

Esta fórmula nos permite conocer cualquier término sin necesidad de hallar toda la sucesión.



Ejemplos:
a) La sucesión 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, ... es una progresión aritmética de diferencia $d = 0,5$.
Su término general será:

$$a_n = 1,5 + (n-1)\cdot 0,5 \Leftrightarrow a_n = 1 + 0,5n.$$

Con esto, por ejemplo:

$$a_{35} = 1 + 0,5\cdot 35 = 18,5;\ a_{100} = 1 + 0,5\cdot 100 = 51$$

b) La sucesión 1, 3, 5… es la de los números impares, que es una progresión aritmética de diferencia 2. Su término general será:

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 2 \Leftrightarrow a_n = 2n - 1$$

Otro paso adelante. A partir de lo visto, podríamos plantearnos problemas como los que siguen:
1. Para la progresión aritmética 9, 13, 17… ¿cuál es el valor del término trigésimo quinto?
2. Si de una progresión aritmética se sabe que $a_{12} = 21$ y $a_{30} = 30$, ¿cuál es la diferencia de la progresión?; ¿cuánto vale a_n?
…
Y se pueden seguir buscando nuevas propiedades y hacer conjeturas como la siguiente.

Conjetura. "La suma de los *n* primeros números impares es igual a n^2".
Esta conjetura puede comprobarse que es cierta en unos cuantos casos:

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

La conjetura parece cierta: lo ha sido en los cuatro casos vistos. Pero, ¿será cierta para la suma de cualquier número de impares consecutivos? Veamos.

Demostración
Esta conjetura puede demostrarse por el método de inducción, que básicamente consiste en demostrar que una propiedad es cierta para el siguiente de cualquier número natural *n*. Por tanto, si es cierta para 1, lo será para 2, y para 3, y *así sucesivamente*.
Ya se ha visto que es cierta para $n = 1$ (y para más casos). Ahora *hay que demostrar* que si

$$1 + 3 + 5 + ... + a_n = n^2$$ (la suma de los *n* primeros números impares)

También será cierto que

$$1 + 3 + 5 + ... + a_n + a_{n+1} = (n+1)^2$$ (la suma de los $n + 1$ primeros números impares)

Como $a_n = 2n - 1$ y $a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$, se tendrá:

$$1 + 3 + 5 + ... + a_n + a_{n+1} = (1 + 3 + 5 + ... + a_n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

En consecuencia, la conjetura ha quedado demostrada, y la relación

$$1 + 3 + 5 + ... + a_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

es cierta para cualquier número natural *n*.